LE NOMBRE CARDINAL

I- Généralité :

Classes d'équivalence d'**ensembles équipotents** (deux ensembles **A** et **B** sont dits équipotents s'il existe une bijection de **A** sur **B**) notée card (**A**).

Cette définition permet d'introduire les entiers naturels comme nombres cardinaux d'ensembles finis :

0 = card (0), 1 = (0), 2 = card (0, 1), …

Le cardinal d'un ensemble infini, c'est-à-dire d'un ensemble équipotent à un de ses sous-ensembles propres, est dit **transfini**. Pour les nombres cardinaux, il est possible d'introduire des opérations de la façon suivante : si **A** et **B** désignent deux ensembles disjoints, a =card (**A**) et b = card (**B**), on pose :

a + b = card (A U B), ab = card (A X B)

(A X B désigne l'ensemble produit); **ab** est le nombre cardinal de l'ensemble des applications de B dans A. on peut aussi définir une relation d'ordre partiel a ≤ b si, et seulement si, il existe une bijection de A sur une partie de B.

Le théorème **Cantor** affirme que tout nombre cardinal admet un majorant strict : quel que soit A, le cardinal de A est plus petit que le cardinal de l'ensemble des parties de A ; on a card (g' (A) = 2 card (A).

Le cardinal de l'ensemble des entiers naturels est désigné par %0 (alef zéro). C'est aussi le cardinal de l'ensemble des entiers relatifs, de l'ensemble des rationnels, de l'ensemble des nombres réels algébriques, ensembles qui sont équipotents. Tout ensemble ayant %0 pour cardinal est dit **dénombrable**. L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable : si on désigne par % son nombre cardinal, on montre que % = 2%0. L'hypothèse du continu consiste à supposer que, pour tout nombre cardinal **transfini** a, le nombre cardinal immédiatement supérieur est 2a.